

Statistische Entscheidungsmodelle

Von
o. Prof. Dipl.-Vw.
Dr. Gerhard Marineil
Institut für Statistik
Universität Innsbruck

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	XI
Statistische Entscheidungsmodelle	1
1. Entscheidungstheoretisches Grundmodell	1
a) Entscheidungsproblem des Statistikers	1
b) Parameterraum	2
c) Aktionsraum	3
d) Schadenfunktion	3
e) Entscheidungsbaum	4
2. Klassisches Modell	5
a) Stichprobenraum und statistisches Verfahren	5
b) Menge der statistischen Verfahren	6
c) Risikofunktion	7
d) Gleichmäßig beste Verfahren	8
e) Entscheidung im klassischen Modell	8
3. Bayes Modell	9
a) Prioriverteilung	9
b) Bayes Risiko	10
c) Entscheidung im Bayes Modell	12
4. Wald Modell	12
a) Schadenfunktion	12
b) Minimax Regel	13
c) Bayes Regel	15
d) Entscheidung im Wald Modell	16
 A) Klassisches Modell	 17
<i>1. Stichprobe</i>	 19
1. Einfache Stichprobe	19
a) Unabhängig und identisch verteilt	19
b) Gemeinsame Verteilungsfunktion	19
c) Likelihoodfunktion	20
2. Stichprobenfunktion	20
a) Stichprobenfunktion als Zufallsvariable	20
b) Stichprobenmomente	21
c) Ordnungsmaßzahlen	22
3. Suffizienz	22
a) Definition der Suffizienz	22
b) Faktorisationskriterium	23
c) Minimal suffizient	24
4. Exponentialfamilie	24
a) Einparametrische Exponentialfamilie	24

b) Suffiziente Stichprobenfunktion einer einfachen Stichprobe aus einer Verteilung der einparametrischen Exponentialfamilie.	25
c) k-parametrische Exponentialfamilie.	25
Aufgaben und weitere Ergebnisse	26
<i>//. Testverfahren.</i>	<i>28</i>
1. Terminologie der klassischen Testtheorie.	28
a) Null- und Alternativhypothese.	28
b) Testfunktion.	28
c) Fehlerarten.	30
d) Fehlerwahrscheinlichkeiten.	32
2. Beste Testfunktion.	33
a) Schadenfunktion der klassischen Testtheorie.	33
b) Dilemma der klassischen Testtheorie.	36
c) Dominanz, Zulässigkeit und Vollständigkeit.	37
3. Neyman Pearson Theorie.	37
a) Signifikanzniveau und Macht.	37
b) Gütefunktion.	38
4. Einfache Hypothesen.	38
a) Neyman Pearson und Teststatistik.	38
b) Randomisierte Testfunktion.	40
5. Einseitige Hypothesen.	41
a) Monotoner Likelihoodquotient.	41
b) Einparametrische Exponentialfamilie und gleichmäßig beste Testfunktion.	44
6. Zweiseitige Hypothesen.	44
a) Unverzerrte Testfunktion.	44
b) Einparametrische Exponentialfamilie und unverzerrte gleichmäßig beste Testfunktion.	46
c) k-parametrische Exponentialfamilie.	46
7. Likelihoodquotienten Methode (LQ-Methode).	47
a) Technik.	47
b) Eigenschaften.	48
Aufgaben und weitere Ergebnisse.	49
<i>///. Intervallschätzverfahren.</i>	<i>52</i>
1. Vokabular der Intervallschätzverfahren.	52
a) Konfidenzintervall und -niveau.	52
b) Zusammenhang zwischen Test- und Intervallschätzverfahren.	52
c) Überdeckungswahrscheinlichkeiten.	53
2. Einseitige Konfidenzintervalle.	54
a) Gleichmäßig beste Intervallschätzfunktion.	54
b) Interpretation des Konfidenzniveaus.	55
3. Zweiseitige Konfidenzintervalle.	55
a) Unverzerrte Intervallschätzfunktion.	55

b) Minimaler Erwartungswert der Intervalllänge	57
c) Konfidenzintervalle minimaler Länge bei nichtsymmetrischen Verteilungen.	58
Aufgaben und weitere Ergebnisse	
<i>IV. Punktschätzverfahren.</i>	61
1. Beste Punktschätzfunktion	61
a) Schätzfunktion und Schätzwert	61
b) Mittleres Fehlerquadrat einer Schätzfunktion	61
2. Beschränkung auf Teilmengen von Punktschätzfunktionen	63
a) Unverzerrte Punktschätzfunktion	63
b) Cramer Rao Theorem.	65
c) Bedingung für Punktschätzfunktionen mit minimaler Varianz	67
d) Blackwell Rao Theorem.	68
3. Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode).	69
a) Likelihoodgleichungen.	69
b) ML-Methode für Verteilungen der Exponentialfamilie	70
c) Unverzerrtheit und ML-Schätzungen.	70
d) Asymptotische Eigenschaften der ML-Schätzfunktionen.	70
Aufgaben und weitere Ergebnisse	71
B) Bayes Modell	73
<i>I. Posterioriverteilung.</i>	75
1. Bayes Theorem	75
a) Bayes Theorem für Ereignisse.	75
b) Bayes Theorem für Zufallsvariable.	75
c) Alternative Formel	76
2. Konjugierte Verteilungsfamilien	78
a) Konstruktion konjugierter Verteilungsfamilien	78
b) Hypothetische Stichprobe	80
c) Suffiziente Stichprobenstatistik	80
d) Prädiktive Verteilung	82
e) Konjugierte Verteilungen für mehrparametrische Exponentialfamilien	82
3. Vage Aprioriinformationen	84
a) Uneigentliche Prioriverteilung.	84
b) Priorigleichverteilung	84
c) Weitere uneigentliche Priori Verteilungen.	85
Aufgaben und weitere Ergebnisse	85
<i>II. Testverfahren.</i>	88
1. Beste Testfunktion	88
a) Risikoerwartungswerte.	88
b) Testfunktion mit minimalen Bayes Risiko.	90
c) Testfunktion mit minimalem Posteriorischadenerwartungswert	90
d) Roll Back Analyse.	94

e) Posterioriwahrscheinlichkeitsquotient	94
2. Einfache Hypothesen	97
a) Prioriwahrscheinlichkeitsquotient und Likelihoodquotient	97
b) Posterioriwahrscheinlichkeitsquotient	98
3. Einseitige Hypothesen	99
4. Zweiseitige Hypothesen	100
a) Intervallnullhypothese	100
b) Punktnullhypothese	101
5. Beziehungen zum klassischen Modell	102
a) Auswahlkriterium	102
b) Signifikanzniveau und Prioriwahrscheinlichkeitsquotient	102
c) Unterschiede in der Interpretation der Ergebnisse	103
Aufgaben und weitere Ergebnisse	104
 <i>III. Intervallschätzverfahren</i>	 106
1. Intervallschätzfunktion des Bayes Modells	106
a) Familie von Bayes Intervallen	106
b) Niveauforgabe auch im Bayes Modell	107
2. HPD-Intervalle	108
a) Minimale Intervalllänge	108
b) HPD Intervalle für symmetrische Verteilungen	108
c) HPD Intervalle für nichtsymmetrische Verteilungen	109
3. Beziehungen zum klassischen Modell	110
a) HPD Intervalle und unverzerzte Konfidenzintervalle	110
b) Interpretation von Bayes- und Konfidenzintervallen	110
Aufgaben und weitere Ergebnisse	111
 <i>IV. Punktschätzverfahren</i>	 113
1. Bayes'sche Punktschätzfunktion	113
a) Funktionen der Posterioriverteilung	113
b) Punktschätzfunktion mit minimalem Bayes Risiko	113
c) Punktschätzfunktion mit minimalem Posteriorischaden- erwartungswert	117
d) Erwartungswert der Posterioriverteilung	117
2. Beziehung zum klassischen Modell	120
a) Keine Beschränkung auf unverzerzte Schätzfunktionen	120
b) ML-Methode und Modus der Posterioriverteilung	120
c) Interpretation bei vager Aprioriinformation	120
Aufgaben und weitere Ergebnisse	121
 C) Wald Modell	 123
 <i>I. Schadenfunktion</i>	 125
1. Standardschadenfunktionen	125
a) Nutzen- und Opportunitätskostenfunktion	125
0 — 1 und 0 — s [^] Schadenfunktion	126

c) Lineare Schadenfunktion	127
d) Quadratische Schadenfunktion	128
2. Bayes Regel	129
a) Minimales Bayes Risiko	129
b) Minimaler Posteriorischadenerwartungswert	130
3. Minimax Regel	131
a) Minimum des maximal möglichen Schadens	131
b) Ungünstige Prioriverteilung	131
c) Methoden zur Bestimmung bester statistischer Verfahren nach der Minimax-Regel	131
d) Randomisierte statistische Verfahren	132
Aufgaben und weitere Ergebnisse	132
 <i>II. Testverfahren.</i>	135
1. Beste Testfunktion	135
a) Bayes Risiko einer Testfunktion	135
b) Beste Testfunktion nach der Bayes Regel	136
c) Posteriorischadenerwartungswert und Roll Back Analyse	137
d) Quotient aus den Posteriorischadenerwartungswerten	140
e) Beste Testfunktion nach der Minimax Regel	140
2. Einfache Hypothesen	144
a) Beste Testfunktion nach der Bayes Regel	144
b) Beste Testfunktion nach der Minimax Regel	145
3. Einseitige Hypothesen	146
a) 0 — S _j Schadenfunktion	146
b) Lineare Schadenfunktion	147
4. Zweiseitige Hypothesen	148
0 — S _i Schadenfunktion	148
b) Lineare Schadenfunktion	149
c) Quadratische Schadenfunktion	150
5. Bezeichnungen zum Bayes und klassischen Modell	151
a) Bayes Modell als Spezialfall des Wald Modells und der Bayes Regel	151
b) Klassisches Modell als Spezialfall des Wald Modells und der Minimax Regel	151
Aufgaben und weitere Ergebnisse	152
 <i>III. Intervallschätzverfahren.</i>	154
1. Intervallschätzverfahren im Wald Modell	154
a) Schadenfunktion für Intervallschätzverfahren	154
b) Beste Intervallschätzfunktion nach der Bayes Regel	154
2. Spezielle Schadenfunktionen	155
a) Lineare Schadenfunktion	155
b) Lineare Schadenfunktion und fixe Intervalllänge	156
c) Quadratische Schadenfunktion	156

3. Beziehungen zum Bayes Modell	157
Aufgaben und weitere Ergebnisse.	157
<i>IV. Punktschätzverfahren.</i>	160
1. Beste Punktschätzfunktionen nach der Bayes Regel.	160
2. Spezielle Schadenfunktionen.	164
a) 0 — 1 Schadenfunktion und Modus.	164
b) Lineare Schadenfunktion und Zentralwert	164
c) Lineare Schadenfunktion und Quantile.	166
d) Quadratische Schadenfunktion und Erwartungswert	166
3. Beste Punktschätzfunktion nach der Minimax Regel.	167
4. Beziehungen zum Bayes und klassischen Modell.	168
Aufgaben und weitere Ergebnisse.	169
<i>Anhang.</i>	171
I. Einige Beweise.	173
II. Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie	189
III. Verteilungen.	199
IV. Literaturverzeichnis	206
Sachwortverzeichnis	211