

**JOOS / RICHTER**

# **Höhere Mathematik**

**Ein kompaktes Lehrbuch  
für Studium und Beruf**

**Von Dr. Egon W. Richter**

o. Professor *an* der Technischen Universität Braunschweig

13., korrigierte Auflage  
Mit 137 Abbildungen  
und 281 Aufgaben mit Lösungen

**Verlag Harri Deutsch  
Thun und Frankfurt am Main**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1.</b>	<b>Mengen und Zahlen</b>	13
1.1.	Klassen und Mengen, Relationen und Funktionen	13
1.2.	Zahlen und Folgen	19
1.2.1.	Natürliche Zahlen	20
1.2.2.	Ganze Zahlen	21
1.2.3.	Rationale Zahlen	21
1.2.4.	Reelle Zahlen	22
1.2.5.	Komplexe Zahlen	29
1.3.	Kombinatorik	32
1.3.1.	Permutationen	32
1.3.2.	Variationen und Kombinationen	33
1.4.	Aufgaben zu 1.1.—1.3.	35
<b>2.</b>	<b>Beile Funktionen reeller Veränderlicher</b>	37
2.1.	Funktionen und ihre Darstellung	37
2.2.	Einfachste Funktionen	48
2.2.1.	Rationale Funktionen	48
2.2.2.	Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen	50
2.2.3.	Logarithmus	54
2.2.4.	Trigonometrische (Kreis-)Funktionen	57
2.2.5.	Zyklometrische Funktionen	63
2.2.6.	Hyperbelfunktionen und ihre Umkehr	64
2.3.	Aufgaben zu 2.1.—2.2.	66
<b>3.</b>	<b>Algebraische Gleichungen und Matrizen</b>	67
3.1.	Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten	67
3.1.1.	Sätze über die reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen und deren Berechnung	68
3.2.	Lineare Gleichungssysteme	72
3.2.1.	Determinanten	72
3.2.2.	Auflösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe von Determinanten	75
3.3.	Matrizen	76
3.3.1.	Allgemeine Definitionen und Verknüpfungsregeln	76
3.3.2.	Spezielle Matrizen	78

3.3.3.	Eigenwerte, Eigenvektoren. . . . .	80
3.4.	Lineare Transformationen. . . . .	83
3.4.1.	Allgemeines über Transformationen. . . . .	83
3.4.2.	Orthogonale Transformationen. . . . .	85
3.5.	Aufgaben zu 3.1.—3.4. . . . .	90
<b>4.</b>	<b>Differentialrechnung</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>4.1.</b>	<b>Ableitung der Funktionen mit einer Veränderlichen</b> . . . . .	<b>91</b>
4.1.1.	Ableitung und Differentialquotient. . . . .	91
4.1.2.	Differentiale als unendlich kleine Größen. . . . .	95
4.1.3.	Differentialquotient einer Potenz mit beliebigem Exponenten. . . . .	96
4.1.4.	Differentialquotient einer Funktion mit einem konstanten Koeffizienten und einer vielgliedrigen Summe. . . . .	98
4.1.5.	Differentialquotient einer Exponentialfunktion. . . . .	98
4.1.6.	Differentialquotienten trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen . . . . .	99
4.1.7.	Differentialquotient eines Produkts und eines Quotienten. . . . .	100
4.1.8.	Differentialquotient der Umkehrfunktion. . . . .	102
4.1.9.	Stufenweise Differentiation (Kettenregel). . . . .	104
4.1.10.	Differentiation von Funktionen in Parameterdarstellung. . . . .	108
4.1.11.	Ableitungen und Differentialquotienten höherer Ordnung . . . . .	108
4.1.12.	Höhere Differentialquotienten einer Potenz . . . . .	110
4.1.13.	Höhere Differentialquotienten exponentieller und trigonometrischer Funktionen . . . . .	110
4.1.14.	Wiederholte Differentiation eines Produkts . . . . .	111
4.1.15.	Höhere Differentialquotienten einer Funktion, die indirekt von der Veränderlichen abhängt . . . . .	112
4.1.16.	Zweiter Differentialquotient für Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	112
4.2.	Einige Anwendungen des Differentialquotienten. . . . .	113
4.2.1.	Maxima und Minima einer Funktion . . . . .	113
4.2.2.	Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	116
4.2.3.	Regel von BERNOULLI und DE L'HOSPITAL zur Bestimmung von Grenzwerten . . . . .	118
4.2.4.	TAYLORScher Satz . . . . .	121
4.3.	Ableitung der Funktionen mit mehreren Veränderlichen . . . . .	125
4.3.1.	Partielle Differentialquotienten und totales Differential . . . . .	125
4.3.2.	Einfluß der Meßgenauigkeit auf das Endergebnis. . . . .	129
4.3.3.	Höhere partielle Differentialquotienten . . . . .	130
4.3.4.	Bedingungen dafür, daß $y(x,y) dx + y(x,y) dy$ ein vollständiges Differen- tial ist . . . . .	131
4.3.5.	Differentiation von Funktionen, wenn neue Veränderliche eingeführt werden . . . . .	132
4.4.	Einige Anwendungen der partiellen Ableitungen. . . . .	146
4.4.1.	TAYLORScher Satz für eine Funktion mit mehreren Veränderlichen . . . . .	136
4.4.2.	Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	137
4.4.3.	Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher bei Be- stehen von Nebenbedingungen . . . . .	139
4.5.	Aufgaben zu 4.1.—4.4. . . . .	140

5.	<b>Aus der analytischen Geometrie.</b>	143
5.1.	Lineare Gebilde.	144
5.2.	Ebene Kurven, insbesondere Kurven zweiten Grades.	146
5.2.1.	Gleichungen der Tangente und Normale einer Kurve.	<b>146</b>
5.2.2.	Bogenelement einer Kurve.	149
5.2.3.	Krümmung und Krümmungsradius.	149
5.2.4.	Kreis.	151
5.2.5.	Ellipse.	151
5.2.6.	Hyperbel und Parabel.	155
5.2.7.	Ausgeartete Kegelschnitte.	159
5.2.8.	Diskussion der Kurven zweiten Grades. Hauptachsentransformation.	159
5.3.	Flächen zweiten Grades.	165
5.3.1.	Rotationsflächen zweiten Grades.	165
5.3.2.	Allgemeine Flächen zweiten Grades.	168
5.4.	Aufgaben zu 5.1.—5.3.	171
<b>6.</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>173</b>
6.1.	Bestimmtes Integral.	174
6.1.1.	Definition und Eigenschaften eines bestimmten Integrals.	174
6.1.2.	Bogenlänge.	178
6.2.	Unbestimmtes Integral.	179
6.2.1.	Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration.	179
6.2.2.	Stammfunktionen zu den einfachsten Funktionen.	180
6.3.	Integrationsmethoden für analytisch auswertbare Integrale.	182
6.3.1.	Integral einer Summe oder Differenz von Funktionen.	182
6.3.2.	Partielle Integration.	183
6.3.3.	Einführung einer neuen Veränderlichen.	185
6.3.4.	Anwendung der Integrationsmethoden auf einige Funktionenklassen.	188
6.4.	Einige Anwendungen der Integration.	199
6.4.1.	Integraldarstellung des Restgliedes der TAYLORSchen Entwicklung.	199
6.4.2.	Einige geometrische Anwendungen.	200
6.5.	Uneigentliche Integrale, Parameterintegrale und Kurvenintegrale.	202
6.6.	Mehrfache Integrale.	211
6.6.1.	Doppelintegrale.	211
6.6.2.	Dreifache Integrale.	216
6.7.	Aufgaben zu 6.1.—6.6.	218
<b>7.</b>	<b>Vektor- und Tensorrechnung</b>	<b>221</b>
7.1.	Definition des Vektors und Tensors.	221
7.2.	Vektoralgebra.	227
7.2.1.	Addition, Subtraktion, lineare Abhängigkeit.	227
7.2.2.	Skalares Produkt zweier Vektoren.	229
7.2.3.	Vektorprodukt zweier Vektoren.	231
7.2.4.	Mehrfache Produkte von Vektoren.	234
7.2.5.	Einige Anwendungen.	235

7.3.	Differentialgeometrie der Raumkurven und Flächen . . . . .	238
7.3.1.	Differentialgeometrie der Raumkurven . . . . .	238
7.3.2.	Differentialgeometrie der Flächen . . . . .	242
7.4.	Felder und Integralsätze . . . . .	250
7.4.1.	Gradient . . . . .	250
7.4.2.	Vektorfelder . . . . .	252
7.4.3.	Rotation und Integralsatz von STOKES . . . . .	256
7.4.4.	Divergenz und Integralsatz von GAUSS . . . . .	260
7.4.5.	Sprungflächen . . . . .	263
7.4.6.	Vektorumformungen . . . . .	265
7.4.7.	Vektoroperationen in allgemeinen krummlinigen Koordinaten . . . . .	266
7.4.8.	Vektoroperationen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten . . . . .	272
7.4.9.	Spezielle Vektorfelder . . . . .	274
7.5.	Aufgaben zu 7.1.—7.4. . . . .	279
<b>8.</b>	<b>Reihen, FouRiER-Integral und <math>\delta</math>-Funktion.</b> . . . . .	<b>280</b>
8.1.	Reihen . . . . .	280
8.2.	Potenzreihen . . . . .	283
8.2.1.	Asymptotische Reihen . . . . .	287
8.3.	FouRiERsche Reihen . . . . .	290
8.4.	Vektorräume, Funktionenräume . . . . .	297
8.4.1.	Vektorräume, HiLBERT-Räume . . . . .	297
8.4.2.	Integrationsräume . . . . .	301
8.4.3.	Lineare Operatoren . . . . .	305
8.5.	FouRiER-Integral . . . . .	306
8.6.	( $\delta$ -Funktion) . . . . .	309
8.7.	Aufgaben zu 8.1.—8.6. . . . .	314
<b>9.</b>	<b>Funktionen einer komplexen Veränderlichen</b> . . . . .	<b>316</b>
9.1.	Ableitung, Integral und Reihen . . . . .	316
9.1.1.	Ableitung einer komplexen Funktion . . . . .	316
9.1.2.	Konforme Abbildung . . . . .	318
9.1.3.	Anwendung der konformen Abbildung . . . . .	321
9.1.4.	Integrale komplexer Funktionen . . . . .	323
9.1.5.	Potenzreihe, TAYLORSche Reihe, Analytische Fortsetzung . . . . .	325
9.1.6.	LAURENTISche Reihe, Residuum . . . . .	329
9.1.7.	Anwendung des Residuensatzes . . . . .	332
9.2.	LAPLACE-Transformation . . . . .	335
9.2.1.	Operationen . . . . .	336
9.2.2.	Korrespondenzen . . . . .	340
9.3.	Aufgaben zu 9.1.—9.2. . . . .	343
<b>10.</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen und spezielle Funktionen</b> . . . . .	<b>344</b>
<b>10.1.</b>	<b>Allgemeines über Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>344</b>
10.1.1.	Auftreten von Differentialgleichungen, ein Beispiel aus der Physik . . . . .	344
10.1.2.	Einteilung der Differentialgleichungen . . . . .	345

10.1.3.	Integrationskonstanten in den Lösungen von Differentialgleichungen. . . .	345
10.2.	Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	347
10.2.1.	Graphische Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	347
10.2.2.	Trennung der Veränderlichen . . . . .	348
10.2.3.	Gleichungen mit totalen Differentialen. . . . .	349
10.2.4.	Lineare Differentialgleichung erster Ordnung. . . . .	350
10.3.	Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung . . . . .	350
10.3.1.	Erniedrigung der Ordnung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. . .	351
10.3.2.	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffi- zienten . . . . .	352
10.3.3.	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit variablen Koeffi- zienten . . . . .	357
10.3.4.	Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	362
10.4.	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. . . . .	363
10.5.	Zylinderfunktionen und Kugelfunktionen . . . . .	366
10.5.1.	Zylinderfunktionen (BESSELSche Funktionen). . . . .	367
10.5.2.	Kugelfunktionen (LEGENDRESCHIIO Funktionen). . . . .	373
10.6.	Aufgaben zu 10.1.—10.5. . . . .	378
<b>11.</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>380</b>
<b>11.1.</b>	Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	<b>380</b>
<b>11.2.</b>	Quasilineare und lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	<b>383</b>
11.2.1.	Charakteristikenmethode. . . . .	383
11.2.2.	Randbedingungen. . . . .	389
11.2.3.	Lösungsmethoden linearer Differentialgleichungen. . . . .	390
11.3.	Quasilineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung. . . . .	391
<b>11.4.</b>	<b>LAPLACESche und Poissonsche Differentialgleichung (Potentialtheorie)</b> . . .	<b>393</b>
<b>11.4.1.</b>	<b>Lösung der LAPLACESchen Gleichung durch Produktansatz</b> . . . . .	<b>393</b>
11.4.2.	Anwendung der GREENSchen Formeln auf harmonische Funktionen . . . .	398
11.4.3.	Lösung der Poissonschen Gleichung mit Hilfe der GREENSchen Funktion .	399
11.5.	Wellengleichung . . . . .	403
11.6.	Diffusionsgleichung. . . . .	407
11.7.	Aufgaben zu <b>11.1.</b> —11.6. . . . .	409
<b>12.</b>	<b>Lineare Integralgleichungen</b> . . . . .	<b>409</b>
<b>12.1.</b>	<b>FREDHOLMSche Integralgleichungen.</b> . . . . .	<b>411</b>
<b>12.1.1.</b>	<b>Entwicklungen nach Eigenfunktionen.</b> . . . . .	<b>411</b>
12.1.2.	Iterationsverfahren. . . . .	413
12.2.	ABELSche Integralgleichung . . . . .	415
12.3.	Aufgaben zu 12.1.—12.2. . . . .	417
<b>18.</b>	<b>Variationsrechnung</b> . . . . .	<b>417</b>
<b>13.1.</b>	<b>Variationsprobleme mit einer Funktion einer Veränderlichen</b> . . . . .	<b>418</b>
<b>13.1.1.</b>	<b>Extremwerte von Integralen mit Nebenbedingungen.</b> . . . . .	<b>422</b>

12	Inhaltsverzeichnis	
13.2.	Variationsprobleme mit mehreren Funktionen und Veränderlichen.	424
13.3.	Aufgaben zu 13.1.—13.2.	425
<b>14.</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>425</b>
<b>14.1.</b>	Wahrscheinlichkeit und Verteilungsfunktion.	426
14.2.	Versuche mit abzählbarer Ereignismenge.	429
14.2.1.	Binomische Verteilung	430
14.2.2.	PoissoN-Verteilung	431
14.2.3.	Erwartungswerte, Momente.	432
14.3.	Versuche mit nichtabzählbarer Ereignismenge.	436
14.3.1.	Normalverteilung (GAüss-Verteilung).	438
14.3.2.	Fehlerrechnung.	439
14.4.	Aufgaben zu <b>14.1.</b> —14.3.	442
<b>15.</b>	<b>Numerische Methoden</b>	<b>443</b>
15.1.	Auflösung linearer Gleichungssysteme.	443
15.2.	Berechnung eines Polynomwerts.	444
15.3.	Interpolation	444
15.3.1.	Polynome.	444
15.3.2.	Harmonische Analyse.	446
15.4.	Verbesserung einer annähernd bekannten Lösung der Gleichung $f(x) = 0$	448
15.5.	Differentiation und Integration	449
15.5.1.	Differentiation.	449
15.5.2.	Integration	450
15.6.	Differentialgleichungen.	456
15.6.1.	Gewöhnliche Differentialgleichungen.	456
15.6.2.	Partielle Differentialgleichungen.	459
15.7.	Aufgaben zu 15.1.—15.6.	<b>460</b>
<b>16.</b>	<b>Lösungen der Aufgaben.</b>	<b>466</b>
	Literaturhinweise.	483
	Sachverzeichnis.	<b>486</b>