

Peter Steinke

Finite Element- Methode

Theorie und
Anwendungen

Corneteen
GIRARDET

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
1.1 Kurzer historischer Überblick	9
1.2 Vorgehensweise bei der FEM	11
1.3 Verschiedene Elementtypen	11
1.4 Beispiele zur Finite-Element-Methode	17
1.4.1 Beispiel zu linearen Problemen	17
1.4.2 Beispiel zu nichtlinearen Problemen	18
1.4.3 Strukturoptimierung	19
2. Mathematische Grundlagen	23
2.1 Schreibweisen	23
2.2 Vektoren	24
2.2.1 Definition eines n-dimensionalen Vektors	24
2.2.2 Rechenregeln	24
2.3 Matrizen	24
2.3.1 Definition einer Matrix	24
2.3.2 Rechenregeln	25
2.3.3 Transponierte Matrix	26
2.3.4 Orthogonale Matrix	27
2.3.5 Lineare Transformation	27
2.3.6 Dyade (Tensor zweiter Stufe)	29
2.4 Funktionale	30
2.4.1 Diskretisierung des Funktionais	31
2.5 Ableitung von Vektoren	33
2.6 Dreieckskoordinaten	34
2.6.1 Integration über das Dreieck	35
3. Beschreibung elastostatischer Probleme	37
3.1 Differentialgleichung	38
3.2 Prinzip virtueller Verrückungen	39
3.2.1 Euler-Lagrang'sche Gleichung	40
3.2.2 Integration des Funktionais	41
3.3 Die Methode von Ritz	42

4. Stabelemente	45
4.1 Der eindimensionale Stab	45
4.1.1 Verschiebungsansatz	46
4.1.2 Dehnung	47
4.1.3 Stoffgesetz (Hook'sches Gesetz)	47
4.1.4 Funktional	48
4.1.5 Variation des Funktionais	48
4.2 Beispiel zum eindimensionalen Stab	50
4.2.1 Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	55
4.3 Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein)	57
4.4 Der zweidimensionale Stab	59
4.5 Beispiel zum zweidimensionalen Stab	62
4.6 Übungsaufgabe : Zweidimensionales Stabproblem	67
5. Balkenelemente	69
5.1 Das Balkenelement (1D)	69
5.1.1 Problemdefinition	69
5.1.2 Dehnungen und Spannungen im Balken	70
5.1.3 Funktional des Balkenproblems	71
5.1.4 Formfunktionen des eindimensionalen Balkens	72
5.1.5 Diskretisierung des Funktionais	75
5.1.6 Variation des diskretisierten Funktionais	76
5.1.7 Bilden der Steifigkeitsmatrix	77
5.1.8 Diskretisierung der Streckenlast	78
5.1.9 Schnittgrößen des Balkenelementes	80
5.2 Beispiel zum Balken (1D)	83
5.3 Übungsaufgabe : Höhere Anzahl Balkenelemente	87
5.4 Übungsaufgabe : Eindimensionaler Balken	87
5.5 Aufgabe : Balkenelement mit Gelenk	88
5.6 Der elastisch gelagerte Balken	89
5.6.1 Beispiel zum elastisch gelagerten Balken	92
5.7 Balkenelement (2D)	97
5.7.1 Freiheitsgrade des 2D-Balkens	97
5.7.2 Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken	98
5.7.3 Steifigkeitsmatrix	99
5.7.4 Transformation der Steifigkeitsmatrix	101
5.7.5 Steifigkeitsmatrix im globalen System	102
5.8 Beispiel Balken (2D)	105
5.9 Übungsaufgabe : Balkensystem	111
5.10 Übungsaufgabe : Stab-Balkenproblem	112
5.11 Übungsaufgabe : Winkel als Balkenproblem	113

INHALTSVERZEICHNIS

6. Scheibenproblem	115
6.1 Problemdefinition	.115
6.2 Spannungen und Dehnungen in der Scheibe	.116
6.3 Belastungen der Scheibe	.117
6.4 Das Funktional des Scheibenproblems	.118
6.5 Diskretisierung des Funktionais	.118
6.5.1 Formfunktionen des Dreieckselementes	.118
6.5.2 Formfunktion in Dreieckskoordinaten	.123
6.6 Variation des diskretisierten Funktionais	.124
6.6.1 Diskretisierung der Volumenkräfte	.126
6.6.2 Diskretisierung der Streckenlasten	.129
6.7 Spannungsberechnung in der Scheibe	.131
6.8 Beispiel zum Scheibenproblem	.132
6.9 Übungsaufgabe : Scheibenproblem I	.140
6.10 Übungsaufgabe : Scheibenproblem II	.141
7. Wärmeleitung	143
7.1 Feldprobleme	.143
7.2 Problemdefinition	.143
7.2.1 Randbedingungen bei der Wärmeleitung	.144
7.3 Funktional des Wärmeleitungsproblems	.145
7.4 Diskretisierung des Funktionais	.146
7.4.1 Wärmeleitung	.147
7.4.2 Innere Wärmequellen	.150
7.4.3 Wärmeübergang auf den Rändern	.151
7.4.4 Konvektionsmatrix K_A	.151
7.4.5 Wärmeübergangsvektor	.153
7.5 Variation des Funktionais	.154
7.6 Beispiel zur Wärmeleitung	.156
7.7 Übungsaufgabe : Wärmeleitungsproblem I	.162
7.8 Übungsaufgabe : Wärmeleitungsproblem II	.163
8. Lösungen zu den Übungsbeispielen	165
8.1 Lösung : Zweidimensionales Stabproblem	.165
8.2 Lösung : Höhere Anzahl Balkenelemente	.169
8.3 Lösung : Eindimensionaler Balken	.175
8.4 Lösung : Balkenelement mit Gelenk	.178
8.5 Lösung : Balkensystem	.183
8.6 Lösung : Stab-Balkenproblem	.187
8.7 Lösung : Winkel als Balkenproblem	.191
8.8 Lösung : Scheibenproblem I	.193
8.9 Lösung : Scheibenproblem II	.196
8.10 Lösung : Wärmeleitungsproblem I	.199

8.11 Lösung : Wärmeleitungsproblem II	203
A. Verwendete Formelzeichen und Symbole	207
B. Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	213
Bilderverzeichnis	215
Literaturverzeichnis	217
Index	221